

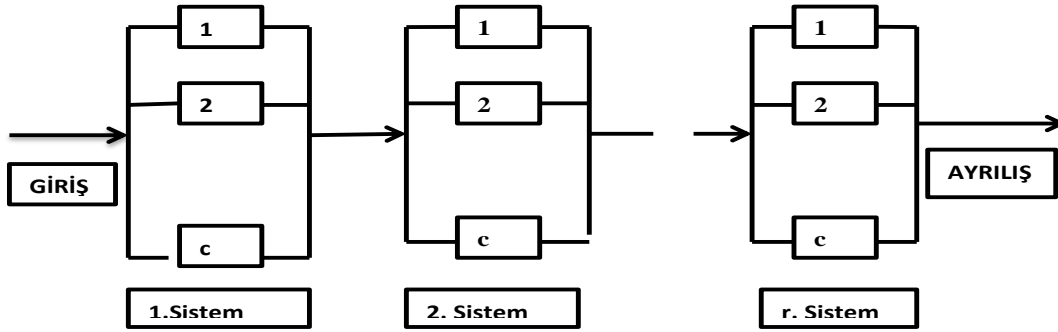
# Kuyruk Teorisi(Y. L.)

## 13. Hafta

### Seri(Tandem) Kanallı Kuyruk Modelleri(devam...)

#### Açık Jackson Modeli

Aşağıdaki gösterilen veriler ile tanımlanan tandem kuyruk modelini göz önüne alalım.



- Sistem, ardışık  $r$  tane  $M/M/c$  tipli kuyruk sisteminden oluşur. Müşteriler sisteme  $\lambda$  parametrelili Poisson akımı ile gelmektedir. Her bir bekleme hattında keyfi sayıda müşteri olabilir.
- $i$  –inci sistemin her bir kanalında hizmet süresi ( $\eta_i$ ),  $\mu_i$  parametrelili üstel dağılıma sahiptir ve  $\eta_1, \dots, \eta_n$ 'ler bağımsızdır.
- Her bir müşteri önce 1. sistemde daha sonra 2. sistemde vb. gibi  $r$ . sistemde

Yukarıda tanımlanan model ilk kez Jackson (1954) tarafından analiz edilmiş ve alt sistemlerdeki müşteri sayılarının bağımsız olduğu açıklanmıştır. Jackson teoremini ifade etmek için aşağıdaki österimleri ifade edelim.

$N_k(t)$ ,  $t$  anındaki- $k$ ncü sistemde bulunan müşteri sayısı olsun.

$$P(N_k(t) = n_k) = p_{n_k}(t) (k = 1, \dots, r ; n_k = 0, 1, \dots,)$$

$$P(N_1(t) = n_1, \dots, N_r(t) = n_r) = P_{n_1, n_2, \dots, n_r}(t)$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{n_1, n_2, \dots, n_r}(t) = p_{n_1, n_2, \dots, n_r}$$

**Teorem(Jackson).**  $\min(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) > \lambda$  koşulu altında

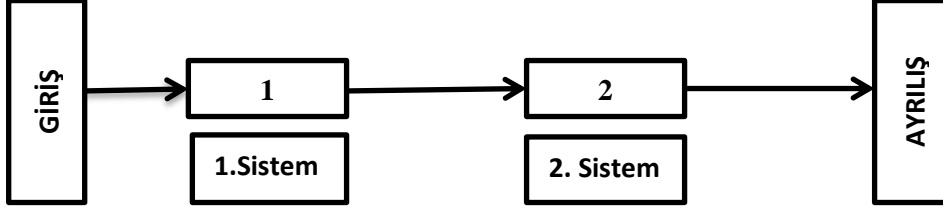
$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{n_1, n_2, \dots, n_r}(t) = p_{n_1, n_2, \dots, n_r}$$

limiti vardır ve

$$p_{n_1, n_2, \dots, n_r} = p_{n_1} \cdot p_{n_2} \cdot \dots \cdot p_{n_r} \quad (n_1 \geq 0, \dots, n_r \geq 0)$$

Jackson teoremini  $r=2$  ve  $c=1$  durumu için ifade edelim ve ispatlayalım. Genel duru için ispat benzer yolla yapılır.

**İspat:**



Önce  $p_{n_1, n_2}(t)$  olasılıkları için diferansiyel denklemleri kuralım.

$$p'_{0,0}(t) = -\lambda p_{0,0}(t) + \mu_2 p_{0,1}(t), \quad n_1 = n_2 = 0,$$

$$p'_{n_1,0}(t) = -(\lambda + \mu_1) p_{n_1,0}(t) + \lambda p_{n_1-1,0}(t) + \mu_2 p_{n_1,1}(t), \quad n_1 > 0, n_2 = 0,$$

$$p'_{0,n_2}(t) = -(\lambda + \mu_2) p_{0,n_2}(t) + \mu_1 p_{1,n_2-1}(t) + \mu_2 p_{0,n_2+1}(t),$$

$$n_2 > 0, n_1 = 0,$$

$$p'_{n_1, n_2}(t) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{n_1, n_2}(t) + \lambda p_{n_1-1, n_2}(t) + \mu_1 p_{n_1+1, n_2-1}(t) + \mu_2 p_{n_1, n_2+1}(t), \quad n_2 > 0, n_1 > 0,$$

Bu denklem sisteminde  $t \rightarrow \infty$  koşulu altında limit alırsak

$$0 = -\lambda p_{0,0} + \mu_2 p_{0,1}, \quad n_1 = n_2 = 0,$$

$$0 = -(\lambda + \mu_1) p_{n_1,0} + \lambda p_{n_1-1,0} + \mu_2 p_{n_1,1}, \quad n_1 > 0, n_2 = 0,$$

$$0 = -(\lambda + \mu_2) p_{0,n_2} + \mu_1 p_{1,n_2-1} + \mu_2 p_{0,n_2+1}, \quad n_2 > 0, n_1 = 0,$$

$$0 = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{n_1, n_2} + \lambda p_{n_1-1, n_2} + \mu_1 p_{n_1+1, n_2-1} + \mu_2 p_{n_1, n_2+1}, \quad n_2 > 0, n_1 > 0,$$

Denklem sistemini elde ederiz. Denklem sisteminin çözümü,

$$p_{n_1, n_2} = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} p_{0,0}, \quad n_2 \geq 0, n_1 \geq 0$$

formülü elde edilir. Burada  $\rho_1 = \lambda/\mu_1, \rho_2 = \lambda/\mu_2$  dir. Bütün olasılıkları  $p_{0,0}$  (sistemin boş olması olasılığı) türünden yazılmıştır. Bilinmeyen  $p_{0,0}$  olasılığını

$$\sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} p_{n_1, n_2} = 1 \text{ ergodiklik koşulundan bulunur.}$$

$$\sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} p_{n_1, n_2} = \sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} p_{0,0} = 1$$

$$p_{0,0} \left( \frac{1}{1-\rho_1} \right) \left( \frac{1}{1-\rho_2} \right) = 1$$

buradan

$$p_{0,0} = (1-\rho_1)(1-\rho_2)$$

böylece

$$p_{n_1, n_2} = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1-\rho_1)(1-\rho_2), n_2 \geq 0, n_1 \geq 0$$

bulunur. Buradan marjinal olasılıklar hesaplanırsa

$$p_{n_1} = \sum_{n_2=0}^{\infty} p_{n_1, n_2} = \sum_{n_2=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1-\rho_1)(1-\rho_2)$$

$$p_{n_1} = \rho_1^{n_1} (1-\rho_1)$$

$$p_{n_2} = \sum_{n_1=0}^{\infty} p_{n_1, n_2} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1-\rho_1)(1-\rho_2)$$

$$p_{n_2} = \rho_2^{n_2} (1-\rho_2)$$

bulunur. Böylece

$$p_{n_1, n_2} = p_{n_1} p_{n_2}$$

olduğu görülür. Yani alt sistemlerdeki müşteri sayıları bağımsızdır.

## Performans Ölçüleri

### a. Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı

$$\begin{aligned} L = E(N_1, N_2) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1 + n_2) p_{n_1, n_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1 + n_2) \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1-\rho_1)(1-\rho_2) \\ &= \frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

### b. Kuyruktaki Ortalama Müşteri Sayısı

Kuyruкта bekleyen müşterilerin ortalama sayısı

$Q = Q_1 + Q_2$  dir. Burada  $Q_1$  ve  $Q_2$  sırası ile 1-inci ve 2-nci kanalın önünde bekleyen müşteri sayıdır. M/M/1 sisteminde ortalama müşteri sayısı formülü kullanıldığında,

$$Q_1 = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} \text{ ve } Q_2 = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2} \text{ elde ederiz. Böylece}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2}$$

bulunur.

### c. Sistemde Ortalama Kalma Süresi

Sistemde kalma süresi, ilk kanal önündeki kuyruğa giriş anı ile ikinci kanaldaki hizmetin bitiş anı arasındaki süredir.

$T_1$ : Bir müşterinin 1-inci sistemde kalma süresi

$T_2$ : Bir müşterinin 2-nci sistemde kalma süresi

$T_1$  ve  $T_2$ 'yi aşağıdaki biçimde gösterelim.

$$T_1 = X_1' + X_2 + \dots + X_{N_1+1}, \quad T_2 = Y_1' + Y_2 + \dots + Y_{N_2+1}$$

Burada,  $X_i \sim \exp(\mu_1)$  ve  $Y_i \sim \exp(\mu_2)$  dir.  $X_i$  ve  $Y_i$ 'ler bağımsızdır.

$N_1$  ve  $N_2$  sırasıyla 1-inci ve 2-nci sistemdeki müşteri sayısı olmak üzere Jackson teoremine göre;

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = p_{n_1, n_2} = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2), \quad n_{1,2} \geq 0$$

**Teorem:**  $T_1$  ve  $T_2$  bağımsız tesadüfi değişkenlerdir.

**İspat:**  $(T_1, T_2)$ 'nin Laplace dönüşümü  $\varphi(u, v)$ ,  $T_1$  ile  $T_2$ 'nin Laplace dönüşümleri sırasıyla  $\varphi_1(u)$  ve  $\varphi_2(v)$  olsun.  $T_1$  ve  $T_2$ 'nin bağımsız olduğunu göstermek için;

$$\varphi(u, v) = \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(v)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\varphi(u, v) = E(e^{-uT_1} \cdot e^{-vT_2})$$

dir. Tam olasılık teoremi gereğince

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} E(e^{-uT_1} \cdot e^{-vT_2} / N_1 = n_1, N_2 = n_2) p_{n_1, n_2} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} E\left[e^{-u(X_1+X_2+\dots+X_{n_1+1})} \cdot e^{-v(Y_1+Y_2+\dots+Y_{n_2+1})}\right] \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \\ \varphi(u, v) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} E\left[e^{-u(X_1+X_2+\dots+X_{n_1+1})}\right] \rho_1^{n_1} (1 - \rho_1) \sum_{n_2=0}^{\infty} E\left[e^{-v(Y_1+Y_2+\dots+Y_{n_2+1})}\right] \rho_2^{n_2} (1 - \rho_2) \end{aligned}$$

Her bir  $X_i$  ve  $Y_i$ 'nin Laplace dönüşümü

$$E(e^{-uX_i}) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + u}, \quad E(e^{-vY_i}) = \frac{\mu_2}{\mu_2 + v}$$

dir. Hem  $X_i$ 'ler, hem de  $Y_i$ 'ler bağımsız olduğundan

$$E\left[e^{-v(Y_1+Y_2+\dots+Y_{n_2+1})}\right] = \left(\frac{\mu_2}{\mu_2 + v}\right)^{n_2+1}$$

$$E\left[e^{-u(X_1+X_2+\dots+X_{n_1+1})}\right] = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1+u}\right)^{n_1+1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \sum_{n_1}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1+u}\right)^{n_1+1} \rho_1^{n_1} (1-\rho_1) \sum_{n_2}^{\infty} \left(\frac{\mu_2}{\mu_2+v}\right)^{n_2+1} \rho_2^{n_2} (1-\rho_2) \\ &= (1-\rho_1) \left(\frac{\mu_1}{\mu_1+u}\right) \sum_{n_1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_1+u}\right)^{n_1} (1-\rho_2) \left(\frac{\mu_2}{\mu_2+v}\right) \sum_{n_2}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_2+v}\right)^{n_2} \\ \varphi(u, v) &= \left[\frac{\mu_1 - \lambda}{\mu_1 - \lambda + u}\right] \left[\frac{\mu_2 - \lambda}{\mu_2 - \lambda + v}\right]\end{aligned}$$

olur. Burada  $v = 0$  alınırsa,

$$\varphi_1(u) = \varphi(u, 0) = \left[\frac{\mu_1 - \lambda}{\mu_1 - \lambda + u}\right]$$

$u = 0$  alınırsa,

$$\varphi_2(v) = \varphi(0, v) = \left[\frac{\mu_2 - \lambda}{\mu_2 - \lambda + v}\right]$$

Böylece

$$\varphi(u, v) = \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(v)$$

$T_1$  'in dağılım fonksiyonu

$$P(T_1 < x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\mu_1 - \lambda)t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ve ortalaması

$$E(T_1) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$P(T_2 < y) = \begin{cases} 1 - e^{-(\mu_2 - \lambda)t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ortalaması

$$E(T_2) = \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

bulunur.

Sistemdeki ortalama kalma süresi  $T = T_1 + T_2$  olduğundan

$$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

bulunur. Görülüyor ki sistemde ortalama kalma süresi  $\mu_1 - \lambda$  ve  $\mu_2 - \lambda$  parametreleri ile hipöstel dağılım göstermektedir. Böylece bu sistem için momentler hesaplanabilir.

$$E[X] = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

$$E[X^2] = \frac{2}{(\mu_1 - \lambda)^2} + \frac{2}{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)} + \frac{2}{(\mu_2 - \lambda)^2}$$

$$\vdots$$

$$E(X^k) = \frac{k!}{(\mu_1 - \lambda)^k} + \frac{k!}{(\mu_1 - \lambda)^{(k-1)}(\mu_2 - \lambda)} + \dots + \frac{k!}{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)^{(k-1)}} + \frac{k!}{(\mu_2 - \lambda)^k}$$

Bu momentler yardımıyla bekleme süresinin varyansı, çarpıklığı ve basıklığı kolayca hesaplanabilir.

#### d. Kuyrukta Ortalama Kalma Süresi

Birinci kuyrukta ve ikinci kuyrukta bir müşterinin ortalama bekleme süresi sırasıyla  $W_1$  ve  $W_2$  olsun. Bir müşterinin servislerde ortalama hizmet süreleri

$$E(X_i) = 1/\mu_1 \quad \text{ve} \quad E(Y_i) = 1/\mu_2 \quad \text{dir.}$$

$$W_1 = T_1 - X_i$$

$$E(W_1) = E(T_1 - X_i) = E(T_1) - E(X_i) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} - \frac{1}{\mu_1} = \frac{\rho_1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1}$$

Benzer yolla

$$E(W_2) = E(T_2 - Y_i) = E(T_2) - E(Y_i) = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} - \frac{1}{\mu_2} = \frac{\rho_2}{\mu_2 - \lambda} = \frac{\rho_2}{1 - \rho_2}$$

Böylece

$$E(W) = E(W_1 + W_2) = E(W_1) + E(W_2) = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} + \frac{\rho_2}{1 - \rho_2}$$

#### Jackson Modelinde Ortalama Kalma Süresinin Optimizasyonu

2 tane ardışık M/M/1 sisteminden oluşan Jackson modelini göz önüne alalım

Müşterinin 1-inci ve 2-nci alt sisteminde ortalama kalma süresi sırasıyla  $1/\mu_1 - \lambda$ ,

$1/\mu_2 - \lambda$  olduğundan bu müşterilerin sistemde ortalama kalma süresi

$$E(T) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

olacaktır.  $\mu_1 + \mu_2 = c$  (sabit) koşulu altında  $E(T)$ 'nin minimizasyon problemini çözelim. Bunun için aritmetik ortalama ile geometrik ortalama arasındaki

$$A.O \geq G.O$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğini kullanalım

Burada  $x_1$  yerine  $1/\mu_1 - \lambda$  ve  $x_2$  yerine  $1/\mu_2 - \lambda$  yazılırsa;

$$\frac{\frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}}{2} \geq \left[ \left( \frac{1}{\mu_1 - \lambda} \right) \left( \frac{1}{\mu_2 - \lambda} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$E(T) \geq 2 \frac{1}{\sqrt{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)}}$$

Benzer şekilde  $x_1$  yerine  $\mu_1 - \lambda$  ve  $x_2$  yerine  $\mu_2 - \lambda$  yazılırsa

$$\frac{(\mu_1 - \lambda) + (\mu_2 - \lambda)}{2} \geq [(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{C - 2\lambda}{2} \geq \sqrt{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)}$$

$$E(T) \geq \frac{4}{c - 2\lambda}$$

olur.

Burada görülüyor ki  $E(T)$ 'nin alabileceği en küçük değer  $4/c - 2\lambda$  dir.

$E(T)$  fonksiyonu  $\mu_1 + \mu_2 = c$  koşulu altında en küçük değerini

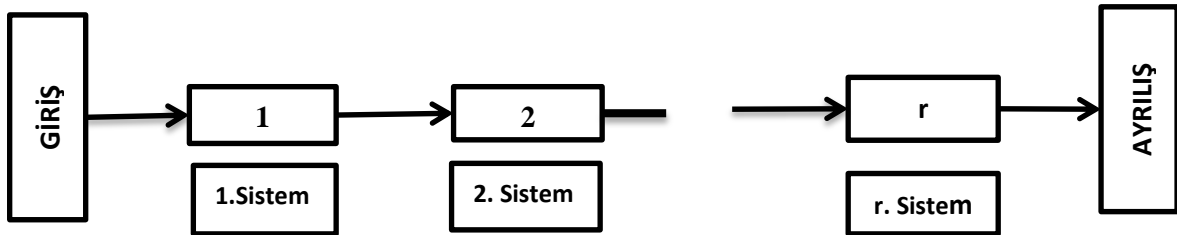
$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{c}{2}$$

olduğunda alır.

$$\min E(T) = \frac{4}{c - 2\lambda}$$

olur.

Bu durum  $r$  tane ardışık M/M/1 sistemi içinde gösterilebilir.



$$E(T) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \dots + \frac{1}{\mu_r - \lambda}$$
$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_r}{r} \geq [x_1 \cdot x_2 \dots x_r]^{\frac{1}{r}}$$

$\mu_1 + \dots + \mu_r = c$  (sabit) koşulu altında  $E(T)$ 'nin minimum değeri benzer yolla incelendiğinde

$$E(T) \geq \frac{r^2}{c - r\lambda}$$

olur.  $E(T)$ 'nin minimumu olan  $r^2 / (c - r\lambda)$  değerini  $\mu_1 = \dots = \mu_r = \frac{c}{r}$  olduğunda alır.